

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ УРОЖАЙНОСТИ СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННЫХ КУЛЬТУР В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ФОСФАТНОГО РЕЖИМА ПОЧВ НЕЧЕРНОЗЕМНОЙ ЗОНЫ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

М.П. Листова, к.б.н., ВНИИА, Э. Альперович, Нью-Йоркский университет, США

Изложен предложенный авторами математический метод моделирования урожайности сельскохозяйственных культур. Метод функциональной аппроксимации основан на использовании прототипа моделируемого процесса. Проведено моделирование урожайности озимой ржи и картофеля без и при внесении удобрений в нормативных дозах на дерново-подзолистой супесчаной почве южнотаежно-лесной зоны в зависимости от её обеспеченности подвижным фосфором. В качестве прототипа использована продуктивность озимой ржи (без внесения удобрений). Результаты моделирования показали высокую точность МФА при интерполяции и экстраполяции продуктивности культур. Показана возможность применения МФА для прогнозирования урожайности разных полевых культур, используя в качестве прототипа одну и ту же зависимость продуктивности подробно изученной одной из культур.

Ключевые слова: обобщение опытов Геосети, моделирование, метод функциональной аппроксимации, прототип, корректирующая функция, расчет прогнозируемой урожайности, плодородие.

Графические зависимости различных процессов, описывающих одно и то же явление, часто очень схожи. Действительно, достаточно взглянуть на листья дерева и увидеть, что это листья клена. Однако положив два любых из них один на другой, легко убедиться, что они не совпадают и сильно различаются. Рассматривая контуры кленовых листьев, как функцию двух переменных и умножая каждую точку одного контура на некий коэффициент, так чтобы она совпала с соответствующей точкой другого, добьемся полного совпадения контуров. Множество таких коэффициентов образует некоторую корректирующую функцию, достаточно сложного вида. Для удобства работы, эту функцию обычно заменяют более простой, которую нетрудно вычислить в заданном интервале изменения аргумента, т.е. используют аппроксимацию. Далее излагается предложенный авторами [1] метод функциональной аппроксимации (МФА).

Предположим, имеется функция одной переменной $F(x)$, описывающая реализацию некоторого процесса, зависящего от ряда параметров. Из-за изменения значений части параметров, новая функциональная зависимость $F_1(x)$ отклонилась от $F(x)$. Допустим, что функцию, аппроксимирующую исследуемый процесс, можно представить как произведение двух функций: $F(x)U(x)$, где $F(x)$ – функция, описывающая одну из предыдущих реализаций того же процесса; или усредненную по нескольким реализациям функциональную зависимость этого процесса; $U(x)$ функция, корректирующая отклонения функциональной зависимости $F(x)$ так, чтобы аппроксимировать функцию $F_1(x)$, описывающую исследуемый процесс. Функция $F(x)$ должна задаваться не меньшим числом точек, чем $F_1(x)$ или быть непре-

рывной и иметь тот же тип, что и функция $F_1(x)$, которую надо аппроксимировать. В соответствии с предположением, аппроксимирующая функция $V(x)$ имеет вид:

$$F_1(x) \approx F(x)U(x), \quad (1)$$

где $F(x)$ – указанная выше функция - прототип, а $U(x)$ – аналитическая функция, учитывающая отклонения от исследуемого процесса, т.е. корректирующая функция (КФ).

Поскольку процесс описывается данными эксперимента, содержащими ошибки измерения, то линейную корректирующую функцию $U(x)$, целесообразно строить по методу наименьших квадратов, а в качестве экспериментальных значений корректирующей функции брать отношения:

$$U(x_i) = \frac{F_1(x_i)}{F(x_i)}, \text{ в точках } x_i, i = 0; 1 \dots s. \quad (2)$$

По сути МФА является разновидностью мультипликативной аппроксимации, что позволяет при малом числе данных учесть специфические особенности исследуемого процесса за счёт его предыдущих реализаций.

Результаты обобщения многолетних опытных данных Геосети по природно-сельскохозяйственным зонам России методом группировок, согласно методике разработки нормативов плодородия [2], показали как возрастает урожай полевых культур без внесения и при внесении средних доз минеральных удобрений, когда в различных типах почв увеличивается содержание подвижного фосфора [3-6].

В качестве примера использования метода функциональной аппроксимации рассмотрено моделирование урожайности озимой ржи на дерново-подзолистой супесчаной почве при внесении удобрений в нормативных дозах ($N_{60-90}P_{40-90}K_{40-90}$) [7] на полях с разным содержанием подвижного фосфора (табл. 1). Обычно функцию урожайности зерновых при этом аппроксимируют либо логарифмической функцией, либо кривой 2-го порядка в виде уравнения регрессии [8, 9].

В качестве прототипа использована регрессионная квадратичная модель урожайности озимой ржи (без внесения удобрений):

$$U б/у = -0,04X^2 + 1,48X + 4, \quad (3)$$

где X – содержание подвижного фосфора в почве.

В работе взята линейная аппроксимация корректирующей функции, которая, как показала практика, достаточно точна, поскольку точность экспериментальных данных невелика.

При использовании МФА выбор типа аппроксимации не существен, поскольку ошибки аппроксимации прототипа (3) учитываются корректирующей функцией.

1. Информация, необходимая для расчета по методу функциональной аппроксимации прогнозируемой урожайности озимой ржи при внесении удобрений

Содержание P ₂ O ₅ , мг/100 г почвы	Урожайности озимой ржи, ц/га			Рассчитываемый показатель			
	по NPK		без удобрений (прототип)				
	*	**	***	1	2	3	4
4,00			9,28		2,04	18,95	21,62
5,00	23,00	23,00	10,40	2,21	2,02	20,95	22,86
6,00		25,25	11,44	2,21	1,90	22,74	23,84
7,00	27,50	27,50	12,40	2,22	1,97	24,32	24,72
8,00	25,00	25,00	13,28	1,89	1,93	25,68	25,46
9,00		25,00	14,08	1,78	1,90	26,85	26,11
10,00	25,00	25,00	14,80	1,67	1,88	27,83	26,67
11,00		28,12	15,44	1,82	1,85	28,61	27,22
12,00	31,50	31,75	16,00	1,98	1,83	29,22	27,70
13,00	27,50	27,50	16,48	1,67	1,80	29,65	28,15
14,00	22,50	22,50	16,88	1,33	1,77	29,92	28,56
15,00		23,30	17,20	1,36	1,75	30,02	28,94
16,00		24,17	17,44	1,39	1,72	29,97	29,30
17,00	25,00	25,00	17,60	1,42	1,69	29,77	29,63
18,00	37,50	37,50	17,68	2,12	1,66	29,43	29,95
19,00		35,63	17,68	2,02	1,64	28,96	30,25
20,00	33,75	33,75	17,60	1,91	1,61	28,35	30,53
21,00			17,44		1,58	27,63	30,80

*Экспериментальные данные усредненных значений урожайности (Уэкс.). **Результаты обработки данных после линейной интерполяции значений урожайности в пропущенных точках (Уэкс.данных). ***Урожай без внесения удобрений (прототип) вычислен в соответствии с формулой (3) во всех точках.

Примечание. 1- значения корректирующей функции, соответствующие формуле (2), (У экс/Ур б/у). 2 - линейная аппроксимация КФ, полученная по методу наименьших квадратов (КФ). 3 - Результаты прогноза урожайности по описанному выше методу МФА. 4 - логарифмическая аппроксимация экспериментальных данных — ln(X) аппр. У экс.д.

Для проверки точности МФА использована логарифмическая аппроксимация зависимости урожая от концентрации P₂O₅ в почве (рис. 1). Логарифмическая функция строилась по методу наименьших квадратов средствами *Microsoft Excel* по 10 точкам эксперимента:

$$Y = 5,54 \ln(X) + 13,95X + 4. \quad (4)$$

Во всем диапазоне логарифмической аппроксимации данных с содержанием P₂O₅ от 4 до 21 мг/100 г почвы точность экстраполяции (ошибка) не превысила 10%.

Моделирование урожайности картофеля при использовании данных продуктивности озимой ржи в качестве прототипа.

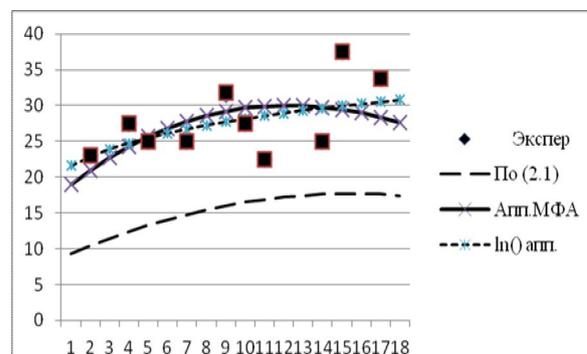


Рис. 1. Данные эксперимента и МФА, соответствующие табл. 1.

Преимуществом МФА по сравнению с другими методами аппроксимации является то, что функция прототипа похожа, но может значительно отличаться от реальной кривой. Её отклонения устраняются корректирующей функцией. Это особенно существенно для объектов живой природы - растений, у которых очень похожи функции роста и существует гомеостаз, что позволяет использовать одну и ту же функцию урожайности в качестве прототипа для абсолютно разных культур. Рассмотрим аппроксимацию урожайности картофеля без и с внесением удобрений в зависимости от обеспеченности дерново-подзолистых почв подвижным фосфором, используя в качестве прототипа ту же квадратичную аппроксимацию урожайности озимой ржи (без внесения удобрений) (табл. 2).

2. Информация, необходимая для расчета по методу функциональной аппроксимации прогнозируемой урожайности картофеля без и при внесении удобрений

P ₂ O ₅ , мг/100 г почвы	Урожай б/у, ц/га, озимая рожь (прототип)	Урожай без удобрения, ц/га				Урожай с удобрением, ц/га			
		экспер., ц/га	лин. интерпол.	U=F ₁ /F б/у	МФА б/у	экспер., ц/га	лин. интерпол.	U=F ₁ /F с удобрен.	МФА с удобрен.
4	9,28		80	8,62	93,22	150	150	16,16	138,39
5	10,40	110	110	10,58	104,60	220	220	21,15	151,08
6	11,44		120	10,49	115,19	180	180	15,73	162,10
7	12,40	130	130	10,48	124,99	210	210	16,94	171,61
8	13,28	170	170	12,80	133,99	220	220	16,577	179,76
9	14,08	150	150	10,65	142,19	250	250	17,75	186,72
10	14,8	150	150	10,14	149,58	190	190	12,84	192,60
11	15,44	130	130	8,42	156,16	200	200	12,95	197,53
12	16,00		143,	8,96	161,92		214	13,38	201,61
13	16,48		157	9,53	166,87		229	13,90	204,93
14	16,88	170	170	10,07	171,00	243	243	14,40	207,58
15	17,20	140	140	8,14	174,30	220	220	12,79	209,62
16	17,44	150	150	8,60	176,78	200	200	11,47	211,11
17	17,60	190	190	10,79	178,43		218	12,40	212,08
18	17,68		185	10,46	179,26		237	13,40	212,55
19	17,68	180	180	10,18	179,26	255	255	14,42	212,55
20	17,60		185	10,51	178,43		232	13,18	212,08
21	17,44		188	10,75	176,78		208	11,93	211,11
22	17,20	190	190	11,05	174,30	185	185	10,76	209,62

На рисунках 2 и 3 приведены, соответствующие экспериментальным данным таблицы 2, логарифмические аппроксимации урожайностей картофеля как без внесения удобрений, так и с удобрениями, а также аппрок-

симирующие кривые, полученные методом МФА при использовании продуктивности озимой ржи в качестве прототипа.

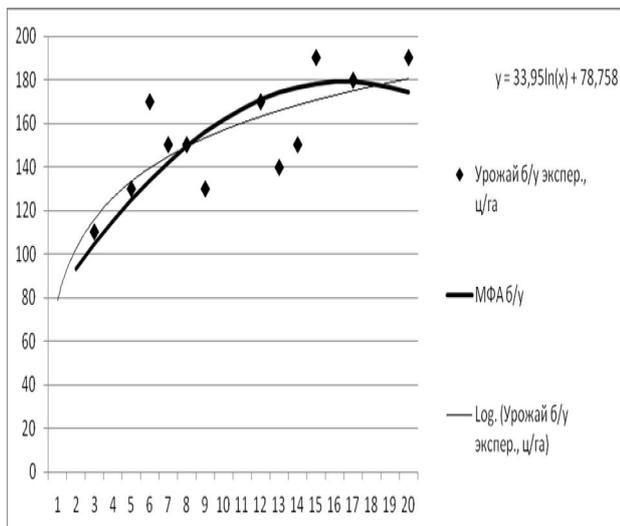


Рис.2. Изменение урожая картофеля, возделываемого без удобрений в зависимости от содержания подвижного фосфора в дерново-подзолистой почве по экспериментальным данным и расчёт прогнозируемой величины урожая по методу функциональной аппроксимации (МФА)

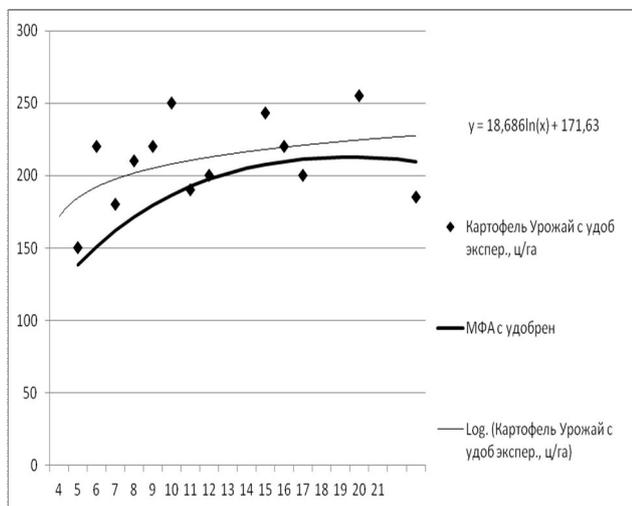


Рис. 3. Урожай картофеля, возделываемого с удобрениями в зависимости от обеспеченности дерново-подзолистых почв подвижным фосфором по опытным данным и по МФА (прототип - озимая рожь)

Как уже отмечалось, при МФА выбор типа аппроксимации не существен, поскольку ошибки аппроксимации прототипа устраняются корректирующей функцией. Для проверки точности МФА использовали логарифмическую аппроксимацию зависимости урожая от концентрации P_2O_5 в почве по методу наименьших квадратов средствами *Microsoft Excel* по точкам эксперимента. Логарифмическая функция продуктивности для картофеля без внесения удобрений имеет вид:

$$Y = 33,95 \ln(X) + 78,76. \quad (5)$$

Для продуктивности картофеля при наличии удобрений:

$$Y = 18,68 \ln(X) + 171,63. \quad (6)$$

Ошибка аппроксимации при изменении концентрации подвижного фосфора в почве (от 4,00 до 190 мг $P_2O_5/100$ г) составляет, соответственно, приблизительно от 4 до 15 % опытных значений данного эксперимента в этих двух случаях.

Поскольку точность экспериментальных данных невелика, для случая аппроксимации продуктивности различных культур, как показала практика, её вполне достаточно.

Заключение. Прделанная работа показала хорошую точность МФА при интерполяции и экстраполяции продуктивности сельскохозяйственных культур. Несложная компьютерная программа, основанная на методе функциональной аппроксимации МФА, дает возможность прогнозировать и оценивать урожайность сельскохозяйственных культур с достаточно высокой точностью даже при малом числе экспериментальных данных (4 значения), что позволяет отказаться от значительного числа затратных исследований. Она же может быть полезным советчиком для аграриев с небольшим опытом работы. Особо важно то, что для хорошей аппроксимации разных культур можно использовать достаточно подробно зафиксированные экспериментальные данные лишь одной из сельскохозяйственных культур агроландшафта в качестве прототипа.

Литература

1. Листова М.П., Альперович Э. Аппроксимация и прогнозирование урожайности сельскохозяйственных культур методом функционального подобия/Материалы Всероссийской конференции учреждений-участников Географической сети опытов с удобрениями. - М.: ВНИИА, 2012.-С 83-86.
2. Методика разработки нормативов зависимости урожая с.-х. культур от показателей плодородия почв. - М.: ВИУА, 1990. - 49 с.
3. Сычев. В.Г. Основные ресурсы урожайности с.-х. культур и их взаимосвязь. - М.: Изд-во ЦИНАО, 2003. - 228 с.
4. Листова М.П. Моделирование агроэкосистем по данным Агротехнической службы и Геосети// Плодородие. - 2007. - №1. - С. 2-4.
5. Фосфатный режим почв земель с.-х. назначения // Бюллетень Геосети. - 2011. - Вып. 11. - 63 с.
6. Совершенствование единой системы мониторинга в длительных агрохимических полевых опытах Геосети // Бюллетень Геосети. - 2016. - Вып. 22. - 44 с.
7. Нормы и нормативы для планирования в сельском хозяйстве. Растениеводство. - М.: Агропромиздат, 1988. - 272 с.
8. Державин Л., Фрид А.С. Модели комплексной оценки плодородия пахотных земель //Агрохимия. - 2002. - №8. - С.5-13.
9. Прошкин В.А. Характеристика моделей прогноза эффективности минеральных удобрений //Плодородие. - 2011. - №3. - С. 27-31.

PREDICTING THE PRODUCTIVITY OF AGRICULTURAL CROPS IN RELATION TO THE PHOSPHORUS STATUS OF SODDY-PODZOLIC SOILS IN THE NONCHERNOZEMIC ZONE BY THE FUNCTIONAL APPROXIMATION METHOD

M.P. Listova¹, E. Alperovich²

¹Pryanishnikov All-Russian Research Institute of Agrochemistry, ul. Pryanishnikova 31A, Moscow, 127550 Russia

²Polytechnic School of Engineering, New York University, 6 MetroTech Center Brooklyn, New York 11201, USA

A mathematical method for the simulation of random processes is described. The method of functional approximation (MFA) is based on the use of the prototype modeling process. The method was used to simulate the yield of winter rye with the application of fertilizers at regulatory rates and the yield of potatoes without fertilizer application on sandy loamy soddy-podzolic soils (southern taiga-forest zone) depending on the availability of mobile phosphorus on the test sites. The productivity of winter rye (without fertilization) as a function of the content of mobile phosphorus in the soil was used as a prototype. The simulation results showed a good accuracy of MFA in the interpolation and extrapolation of crop productivity. The suitability of MFA for forecasting crop yields is shown. For this purpose, the same model of productivity of a thoroughly studied culture depending on the state of soil fertility is used as a prototype.

Keywords: generalization of Geographic Network experiments, simulation, functional approximation method, prototype, correction function, calculation of predicted yield, fertility